

جامعة النيل الابيض

محاضرات في مبادئ الاحتمالات

Principles Of probability

المحاضرة التاسعة

إعداد الاستاذ / فياض محمد عظيم

مقدمة :

إن كلمة الاحتمال تستخدم كثيرا في حياتنا اليومية ، فمثلا يقال أن من المحتمل نزول المطر اليوم ويقال أن احتمال نجاح أحمد في الاختبار أكبر من احتمال نجاح خالد . ويقال من المستحيل نجاح من لم يحضر الاختبار . ويقال أن من المؤكد موت كل إنسان . ويقال أن من الممكن انتقال المرض من المريض إلى الطبيب المعالج... وهكذا.

إن كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة حدوث حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث. ولذلك نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس كمية تقيس فرصة حدوث هذه الحوادث .

إن المقياس الكمي الذي يقيس فرصة حدوث حادثة معينة يسمى بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد .

فكلما زادت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد . وكلما قلت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر .

ولتعريف الاحتمال فإننا لابد أن نتطرق لكثير من المفاهيم مثل مفهوم التجربة العشوائية والحوادث.

Random Experiment التجربة العشوائية:

- التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:
- 1/ جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
 - 2/ لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
 - 3/ يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء (العينة) Sample Space

• فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة.

• ونرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(S)$.

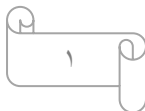
• نقطة العينة هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها أي عنصر من عناصر فضاء العينة S .

Example(1)

أوجد فضاء العينة للتجارب التالية :-

- ١ . تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.
- ٢ . تجربة قذف قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

Solution:



١ . تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة:
لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T :
إن النتائج الممكنة هي H أو T وذلك فإن فضاء العينة هو $S = \{H, T\}$ وعدد عناصره يساوي $n(S) = 2$.
٢ . تجربة قذف قطعتي النقود معا:
لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T :
إن النتائج الممكنة هي :

(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

وعدد عناصره يساوي $n(S) = 4$:

ملاحظة:

$$\begin{aligned} S &= \{H,T\} \times \{H,T\} \\ &= \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\} \\ n(S) &= 2 \times 2 = 4 \text{ (باستخدام قاعدة الضرب)} \end{aligned}$$

Example(2)

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:
١ / تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.
٢ / تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

Solution:

١ . تجربة قذف حجر النرد مرة واحدة:
إن النتائج الممكنة هي 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ولذلك فإن فضاء العينة هو
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
وعدد عناصره يساوي :

$$n(S) = 6$$

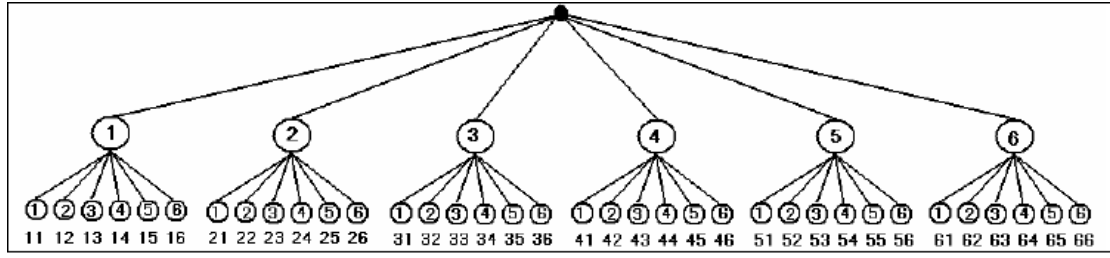
تجربة رمي حجر النرد مرتين:
١ / يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق نذكر من هذه الطرق :
(1) طريقة حاصل الضرب الديكارتي و (2) طريقة الشجرة و(3) طريقة الشبكة أو (الجدول) أولاً : إيجاد فضاء العينة باستخدام حاصل الضرب الديكارتي:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\begin{aligned} = & \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ & (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \end{aligned}$$

وعدد عناصر فضاء العينة (باستخدام قاعدة الضرب) يساوي $n(S) = 6 \times 6 = 36$

ثانيا : إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة :



ثالثا : إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة (الشبكة) أو الجدول:

نتيجة الرمية الثانية

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

نتيجة الرمية الأولى

ملاحظة:

إن (4,3) عنصر من عناصر فضاء العينة وبالتالي فإن (4,3) هي نقطة عينة وذلك لأن $(4,3) \in S$ ، كما أن النتيجة (4,3) تعني ظهور الرقم 4 في الرمية الأولى وظهور الرقم 3 في الرمية الثانية وهذه النتيجة تختلف عن النتيجة (3,4) والتي تعني ظهور الرقم 3 في الرمية الأولى وظهور الرقم 4 في الرمية الثانية.

الحادث أو الحادثة Event:

تعرف الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة S.

A حادثة إذا وإذا فقط كانت $A \subseteq S$.

يقال بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A

الحادثة المستحيلة :

الحادثة المستحيلة $\phi \subseteq S$ (Impossible Event)

حيث أن ϕ هي المجموعة الخالية

الحادثة المؤكدة (Sure Event) $S \subseteq S$

يرمز لعدد عناصر الحادثة A بالرمز $n(A)$. ونقول بأن الحادثة A وقعت إذا كانت

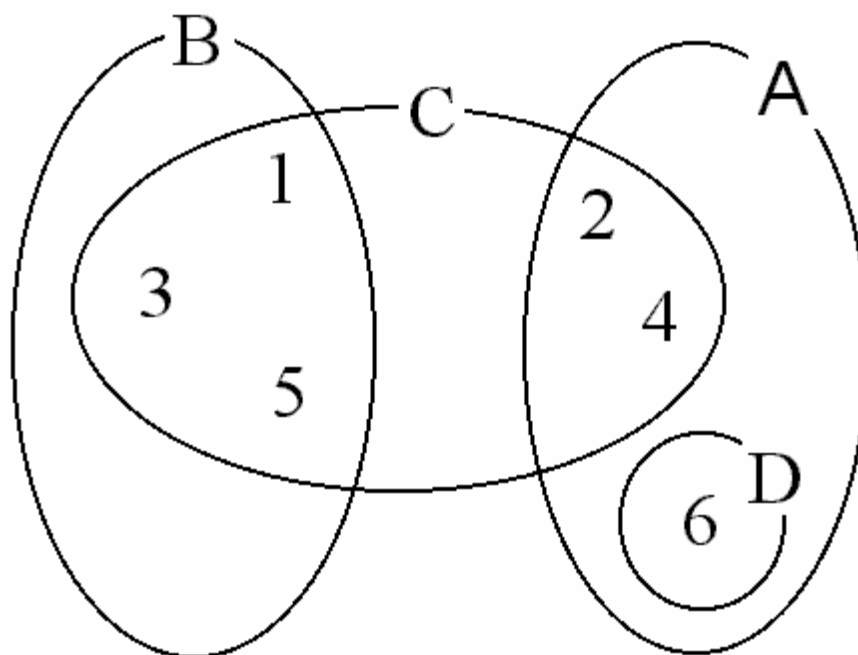
نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A .

Example(3)

في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي فإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة.

عدد العناصر	الحادثة	
$n(A)=3$	$A \subseteq S$	$A=\{\text{ظهور عدد زوجي}\} = \{2, 4, 6\}$
$n(B)=3$	$B \subseteq S$	$B=\{\text{ظهور عدد فردي}\} = \{1, 3, 5\}$
$n(C)=5$	$C \subseteq S$	$C=\{\text{ظهور عدد أقل من ستة}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$n(D)=1$	$D \subseteq S$	$D=\{\text{ظهور العدد ستة}\} = \{6\}$
$n(\phi)=0$	$\phi \subseteq S$	$\phi = \{\text{ظهور عدد سالب}\} = \{\}$
$n(S)=6$	$S \subseteq S$	$S=\{\text{ظهور عدد موجب}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

في هذا المثال يمكن أن نمثل الحوادث بأشكال فن . فالشكل التالي يمثل الحوادث A و B و C و D



في هذا المثال:

نقول بأن الحادثة $A=\{2,4,6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد الأعداد الزوجية أو 2 أو 4 أو 6 .

نقول بأن $D=\{6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي العدد 6 .

وهكذا . .

Example(4)

أحسب الحوادث التالية وعدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال فن وذلك في تجربة قذف قطعة النقود مرتين متتاليتين:

Solution:

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{الحصول على كتابة في الرمية الأولى} \} \\ B &= \{ \text{الحصول على كتابة في الرمية الأولى} \} \\ C &= \{ \text{الحصول على صورة واحدة على الأقل} \} \end{aligned}$$

$$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}; n(S)=4$$

$$A = \{(H,H), (H,T)\}; n(A) = 2$$

$$B = \{(T,H), (T,T)\}; n(B) = 2$$

$$C = \{(H,H), (H,T), (T,H)\}; n(C) = 3$$

Example(5)

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و (y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية (y):

$$A = \{ (x,y): x + y < 4 \}$$

$$B = \{ (x,y): x = y \}$$

$$C = \{ (x,y): x = 5 \}$$

$$D = \{ (x,y): x+y = 1 \}$$

Solution:

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

↑

↑

A

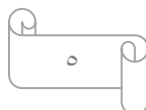
C

$$A = \{ (x,y): x + y < 4 \} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}; n(A)=3$$

$$B = \{ (x,y): x = y \} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}; n(B)=6$$

$$C = \{ (x,y): x = 5 \} = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}; n(C)=6$$

$$D = \{ (x,y): x+y = 1 \} = \{ \} = \varnothing; n(D)=0$$



المحاضرة العاشرة

العمليات على الحوادث (جبر الحوادث) Algebra of Events

بما أن فضاء العينة ما هو إلا مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات على المجموعات تنطبق على الحوادث . وفي دراسة احتمالات الحوادث فإننا نحتاج إلى تعريف بعض الحوادث والتي يمكن تكوينها من حوادث أخرى.

(أ) اتحاد حادثتين : Union

اتحاد حادثتين A, B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A \cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معا . وتقع الحادثة $A \cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعت B و A معا .

شكل فن لتمثيل الاتحاد $A \cup B = \{x \in S: x \in A \text{ أو } x \in B\}$

(ب) تقاطع حادثتين: Intersection

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A \cap B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A وفي B معا . وتقع الحادثة $A \cap B$ إذا وقعت الحادثتان A و B معا . في نفس الوقت .

التقاطع لتمثيل فن شكل $A \cap B = \{x \in S: x \in A \text{ و } x \in B\}$

(ج) متممة أو مكمل حادثة Complement

متممة أو مكمل الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^c أو $\bar{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A وتقع متممة الحادثة $\bar{A}$ إذا لم تقع الحادثة A نفسها .
شكل فن لتمثيل المتممة

$$\bar{A} = A^c = \{x \in S: x \notin A\}$$

لاحظ أن:

$$n(A^c) = n(S) - n(A)$$

(د) الفرق بين حادثتين : Difference between Two Events

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A - B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B . وتقع الحادثة $A - B$ إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B .
شكل فن لتمثيل الفرق

$$A - B = \{x \in S: x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

نتائج:

$$\bullet (A^c)^c = A$$

$$\bullet S^c = \phi$$

$$\bullet \phi^c = S$$

- $A^c = S - A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap S = A$
- $A \cup S = S$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

نتيجة:

- $A - B = A \cap B^c$

نتيجة: قانون دي مورجان:

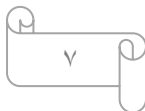
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Example(6)

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.
 ١. أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.
 ٢. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:
 A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى
 B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل
 C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة .
 ٣. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:
 $A \cap B$, $A \cup C$, $A^c \cup B^c$, $(A \cap B)^c$, $A \cap B^c$

Solution:

١. فراغ العينة لهذه التجربة هو:
 $S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T),$
 $(T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$
 عدد عناصر فراغ العينة يساوي:
 $n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$



/٢

$$A = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$$

$$n(A) = 4$$

$$B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$$

$$n(B) = 7$$

$$C = \{(T,H,H), (T,T,H)\}$$

$$n(C) = 2$$

/٣

$$A = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$$

$$B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$$

$$C = \{(T,H,H), (T,T,H)\}$$

$$A^c = \{(T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$$

$$B^c = \{(T,T,T)\}$$

$$\bullet A \cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\};$$

$$n(A \cap B) = 4$$

$$\bullet A \cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\};$$

$$n(A \cup C) = 6$$

$$\bullet A^c \cup B^c = \{(T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$$

$$= \{(T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\};$$

$$n(A^c \cup B^c) = 4$$

$$\bullet (A \cap B)^c = \{(T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\};$$

$$n((A \cap B)^c) = 4$$

$$\bullet A \cap B^c = A - B = \emptyset$$

$$n(A \cap B^c) = 0$$

Disjoint (Mutually Exclusive) Events (المتنافية (المنفصلة) الحوادث

يقال بأن الحادثتين A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين، أي أن $A \cap B = \emptyset$. وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معا أي يستحيل وقوعهما معا، ولذلك فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.

حادثتان متنافيتان $A \cap B = \emptyset$

حادثتان غير متنافيتان $A \cap B \neq \emptyset$

Exhaustive Events : الحوادث الشاملة:

يقال بأن الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحدة منها) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = S$$

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

١ / الحادثتان $B = \{1, 3, 5\}$ و $A = \{2, 4, 6\}$

حادثتان متنافيتان لأن $A \cap B \neq \emptyset$:

شاملتان لأن $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$:

٢ / الحوادث $A_1 = \{1, 2, 3\}$ و $A_2 = \{2, 3, 4\}$ و $A_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ شاملة ولكنها غير متنافية، لماذا.

الحالات متساوية (أو متكافئة) الفرص : Equally Likely

إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة. فمثلاً عند قذف قطعة عملة متزنة مرة واحدة فإن فرصة ظهور الصورة (H) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (T) وكذلك في تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة فإن فرصة ظهور الرقم 1 مساوية لفرصة ظهور الرقم 2 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 3 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 4 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 5 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 6 وعليه فإن كلا التجريبتين المذكورتين متساوية الفرص.

الحالات المواتية للحادثة:

الحالات المواتية لحادثة معينة هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق (أو وقوع) هذه الحادثة وبالتالي فإن الحالات المواتية لحادثة معينة هي نتائج التجربة الممكنة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

الاحتمال Probability

نقرن كل حادثة أو (حدث) معرفة على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة حقيقية تقيس فرصة وقوع هذه الحادثة عند إجراء التجربة. تسمى هذه القيمة باحتمال الحادثة.

احتمال الحادثة : Probability of An Event

احتمال الحادثة A هو مقياس عددي يرمز له بالرمز $P(A)$ ويقاس فرصة وقوع الحادثة A عند إجراء التجربة. وتتراوح قيمة هذا المقياس بين الواحد الصحيح والصفر.

التعريف التقليدي للاحتمال Classical Definition of Probability

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرص و عدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي $n(S)$ فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية :

عدد عناصر الحادثة (A)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة (A)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة (S)}}$$

عدد عناصر فضاء العينة (S)

Example(7)

أوجد احتمال الحوادث في مثال تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة المعطى في المثال رقم (6)

Solution:

بما أن نتائج تجربة رمي حجر النرد المتزن متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة محدود فإن احتمالات الحوادث هي $n(S)=6$:

الاحتمال	عدد العناصر	الحادثة
$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 = 0.5$	$n(A) = 3$	$A = \{2, 4, 6\}$
$P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = 0.5$	$n(B) = 3$	$B = \{1, 3, 5\}$
$P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 = 0.8333$	$n(C) = 5$	$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 = 0.1667$	$n(D) = 1$	$D = \{6\}$
$P(\varphi) = n(\varphi)/n(S) = 0/6 = 0.0$	$n(\varphi) = 0$	$\varphi = \{ \}$
$P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1.0$	$n(S) = 6$	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Example(8)

احسب احتمالات الحوادث في المثال رقم ٦ لتجربة قذف قطعة النقود المتزنة مرتين متتاليتين .

Solution:

بما أن نتائج تجربة قذف قطعة النقود المتزنة متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة محدود فإن احتمالات الحوادث هي $n(S)=4$:

الإحتمال	عدد العناصر	الحادثة
$P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 = 0.5$	$n(A) = 2$	$A = \{(H,H),(H,T)\}$
$P(B) = n(B)/n(S) = 2/4 = 0.5$	$n(B) = 2$	$B = \{(T,H),(T,T)\}$
$P(C) = n(C)/n(S) = 3/4 = 0.75$	$n(C) = 3$	$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\}$

المحاضرة الحادية عشر

مسلمات (بديهيات) الاحتمال Axioms of Probability

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فضاء عينتها هو S فإن الدالة الحقيقية $P(\cdot)$ والمعرفة لجميع الحوادث المعرفة على فضاء العينة S تكون دالة احتمال ويسمى العدد $P(A)$ باحتمال الحادثة A لكل $A \subseteq S$ إذا تحققت المسلمات التالية :

$$1/ \text{ لكل حادثة } A \text{ يكون } P(A) \geq 0$$

$$2/ P(S) = 1$$

3/ إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \dots$ (حوادث متنافية) منفصلة (مثنى مثنى) أو تبادليا أي إذا كان $A_i \cap A_j = \emptyset$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

ملاحظة:

المسلمة رقم (٣) تعني أن احتمال إتحاد متتالية غير منتهية من الحوادث المتنافية تبادليا يساوي مجموع احتمالاتها.

النتائج التالية هي بعض نتائج مسلمات الاحتمال الثلاث السابقة.

بعض نتائج مسلمات الاحتمال:

١. احتمال الحادثة المستحيلة يساوي الصفر، أي أن:

$$P(\emptyset) = 0$$

٢. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ (متنافية) منفصلة (تبادليا) فإن:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

٣. لأي حادثة يكون: $P(A^c) = 1 - P(A)$

٤. لأي حادثتين A و B يكون :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

٥. لأي حادثتين A و B يكون :

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

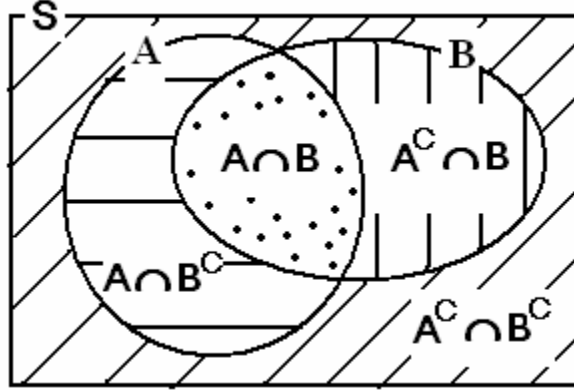
⇔

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

ملاحظة حول الاحتمالات المتعلقة بحادثتين:

يمكن تمثيل احتمالات الحوادث بالمساحات في شكل فن . فمساحة المستطيل الذي يمثل الحادثة المؤكدة أو فضاء العينة S تساوي الواحد الصحيح . ونمثل احتمال أي حادثة أخرى بمساحة المنطقة التي تمثلها هذه الحادثة في شكل فن منسوباً إلى المساحة الكلية للمنطقة التي تمثلها الحادثة المؤكدة . والشكل التالي يبين بعض الحالات المهمة:



لاستنباط القوانين المتعلقة باحتمالات حادثتين فإننا نحاول تمثيل الحادثة المطلوب إيجاد الاحتمال لها كاتحاد حوادث متنافية لكي نستطيع تطبيق النتيجة الثانية لمسلمات الاحتمال المذكورة أعلاه . فعلى سبيل المثال، القوانين التالية يمكن بسهوله استنباطها من شكل فن:

- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
 $= P(B) + P(A \cap B^c)$
 $= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$

أمثلة متنوعة

Example(9)

إذا كان احتمال نجاح محمد في مقرر الإحصاء يساوي 0.6 . فأوجد احتمال رسوبه

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A = \{\text{نجاح محمد في مقرر الإحصاء}\}$
 $A^c = \{\text{عدم نجاح محمد في مقرر الإحصاء}\}$
 $A = \{\text{نجاح محمد في مقرر الإحصاء}\}$
 $A^c = \{\text{رسوب محمد في مقرر الإحصاء}\}$

المعطيات $P(A) = 0.6$

المطلوب:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

Example(10)

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.6 واحتمال نجاح محمد وأحمد معا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A = \{\text{نجاح محمد في الاختبار}\}$

$B = \{\text{نجاح أحمد في الاختبار}\}$

$A \cap B = \{\text{نجاح محمد وأحمد معا في الاختبار}\}$

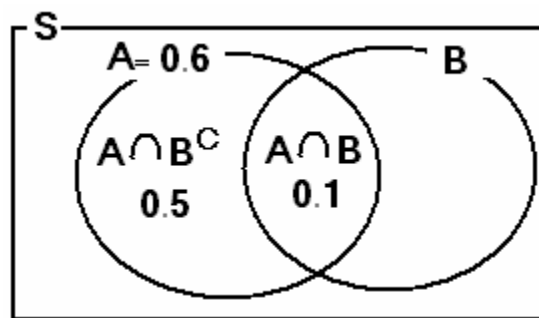
$B^c = \{\text{رسوب أحمد في الاختبار}\}$

$A \cap B^c = \{\text{نجاح محمد ورسوب أحمد في الاختبار}\}$

المعطيات: $P(A \cap B) = 0.1$ و $P(A) = 0.6$

المطلوب:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5$$



Example(11)

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.25 واحتمال رسوب أحمد في هذا الاختبار يساوي 0.3 واحتمال نجاح محمد وأحمد معا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A = \{\text{نجاح محمد في الاختبار}\}$

$B = \{\text{نجاح أحمد في الاختبار}\}$

$A \cap B = \{\text{نجاح محمد وأحمد معا في الاختبار}\}$

$B^c = \{\text{رسوب أحمد في الاختبار}\}$

$A \cup B = \{\text{نجاح أحدهما على الأقل}\} = \{\text{نجاح محمد أو نجاح أحمد في الاختبار}\}$

المعطيات: $P(A) = 0.25$ و $P(B^c) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.1$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$$

المطلوب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.7 - 0.1 = 0.85$$

